OLIMPIADA DE MATEMATICĂ-Etapa locală

GIURGIU-15.02.2015

CLASA a V-a

1. Aflaţi suma numerelor naturale care împărţite la 2015 dau câtul de 31 ori mai mic decât restul.

***

2. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{a3bc}$, divizibile cu 45 ştiind că cifrele a,b,c au aceeaşi paritate.

***

3. Trei fraţi au jucat împreună un bilet la LOTO câştigând o sumă de bani.

Fratele cel mare şi-a însuşit 2750 lei iar ceilalţi doi fraţi au luat sume diferite, mai mici. Fiind nemulţumiţi , fratele cel mare le-a oferit celorlalţi doi banii necesari pentu a-şi tripla sumele avute. Nici de această dată nu au fost mulţumiţi şi atunci fratele mijlociu le-a oferit celorlalţi banii necesari pentru a-şi tripla sumele avute. Cum nici de data aceasta nu au fost mulţumiţi , fratele cel mic le-a oferit celorlalţi doi , banii necesari pentru a-şi tripla sumele pe care le aveau. Ştiind că acum toţi fraţii au primit aceeaşi sumă de bani , aflaţi cât au câştigat la LOTO şi cât luaseră iniţial cei doi fraţi mai mici.

***

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ –Etapa locală

GIURGIU-15.02.2015

CLASA a VI-a

1. Să se arate că numărul

$$n=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2014}+\frac{2}{2015},$$

este număr natural.

Radu Stănică , Frăteşti

2. Se consideră numărul natural n şi numărul $p=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{2015}$.

a) Să se determine valoarea minimă a lui n pentru care $p\in N$.

b)Pentru valoarea minimă de la punctul *a*), aflaţi în câte zerouri se termină numărul p.

c) Pentru valoarea minimă de la punctul *a*) , arătaţi că p nu este pătrat perfect.

Dumitru Preoteasa , Giurgiu

3.Fie triunghiul ABC cu $[AB]\equiv[AC]$ şi $m(\angle BAC)=40^\circ$.În interiorul unghiului *BAC* se consideră un punct D astfel încât $m(\angle BCD)=10^\circ$ şi $m(\angle DBA)=80^\circ$.

Aflaţi măsura unghiului *DAB*.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, **Gazeta Matematică 3/2012-p.E.14315**

4. Să se afle măsura unui unghi ştiind că suplementul său este cu $25^\circ 36' 24''$ mai mică decât triplul complementului său.

***

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ-Etapa locală

GIURGIU-15.02.2015

CLASA a VII-a

1. Să se arate că numărul $n=\sqrt{2+\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}$ este natural.

Radu Stănică , Frăteşti

2. Fie numărul $x=\sqrt{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}$.
Să se calculeze x^4 .

Daniela Boanţă, Giurgiu

3. În triunghiul ABC se consideră punctul $P\in(AC)$ astfel încât AP=4PC şi punctul D care este simetricul lui B faţă de P.Dacă $A_{ABCD}=2015\,cm^2$, să se afle $A_{\Delta CDP}$.

Dumitru Preoteasa ,Giurgiu

4. În dreptunghiul ABCD , E este mijlocul laturii [BC] şi F este mijlocul laturii]AD].
Ştiind că $AC\cap BF=\{M\}$ şi $AC\cap DE=\{N\}$, demonstraţi că:

a) $[AM]\equiv[MN]\equiv[NC]$
b) Patrulaterul MENF este paralelogram.

Rodica Mărăcineanu,Giurgiu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ-Etapa locală

GIURGIU-15.02.2015

CLASA a VIII-a

1.Se consideră numerele reale a şi b.Dacă $a^2+b^2-a-5b+5=0$, să se arate că $a+b\in[1;5]$.

***

2. Fie expresia $E(x,y)=\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{4y^2+12y+18}$.

a) Stabiliţi valoarea minimă a expresiei E(x,y).

b) Rezolvaţi ecuaţia E(x,y)=5.

Daniela Boanţă, Giurgiu

3. Fie cubul ABCDA'B'C'D' de latură l şi M mijlocul muchiei AA'

a) Să se calculeze aria triunghiului MCD'.

b) Să se determine cosinusul unbghiului determinat de dreptele MC şi AC'.

***

4. În tetraedrul ABCD se cunosc volumul său egal cu $\frac{1}{12}$, $m(\angle ABC)=60^\circ$ şi AD+BC+AB$\sqrt{3}$=3.

Calculaţi lungimile muchiilor tetraedrului.

Dan Nedeianu ,Gazeta Matematică nr.3/2012

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ-Etapa locală

GIURGIU-15.02.2015

CLASA a IX-a

1. a) Să se arate că $m-n\sqrt{2015}\neq 0, \forall m,n\in N^*$.

b) Fie numerele $x,y,z\in N^*$. Să se arate că $\frac{x-y\sqrt{2015}}{y-z\sqrt{2015}}\in Q$, dacă şi numai dacă x,y,z sunt în progresie geometrică.

Ionel Tudor,Călugăreni

2. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\left[\frac{5x}{3}\right]+\left[\frac{5x+1}{3}\right]+\left[\frac{5x+2}{3}\right]=10x-7.$$

Elena Ţincu,Giurgiu

3. Fie ABCDEF un hexagon insciptibil iar H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6 ortocentrele triunghiurilor ABC , BCD , CDE , DEF , EFA respectiv FAB.

Arătaţi că:

a) $H_1H_2\|AD\|H_4H_5$

b) Dreptele H_1H_4, H_2H_5 şi H_3H_6 sunt concurente.

Şerban Olteanu, Giurgiu

4. Se consideră triunghiul ABC , [AD este bisectoarea unghiului BAC, $D\in(BC)$ iar [DE este bisectoarea unghiului ADC, $E\in(AC)$.

Exprimaţi $\vec{DE}$ în funcţie de $\vec{AB}$ şi $\vec{BC}$, ştiind că AB=12 , AC=18 , BC=15.

***

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ-Etapa locală

GIURGIU-15.02.2015

CLASA a X-a

1.Să se demonstreze inegalitatea:

$$729\lg a\lg b\lg c\le 8\left(\frac{\lg^2 a}{\lg bc}+\frac{\lg^2 b}{\lg ac}+\frac{\lg^2 c}{\lg ab}+\lg abc\right)^3$$, unde a,b,c>1.

Paul Băiatu, Giurgiu

2.Rezolvaţi ecuaţia:

$$3^x+4^x+36^x+48^x=91\cdot 12^{x-1}.$$

George Ionescu, Bolintin Vale

3.Fie $z_1,z_2,z_3\in C$ cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ şi $|1+z_1|=|1+z_2|=|1+z_3|$.

Arătaţi că:

a) $|\mathrm{Im}\, z_1|=|\mathrm{Im}\, z_2|=|\mathrm{Im}\, z_3|$

b) $z_1^{\,2}(z_2-z_3)+z_2^{\,2}(z_3-z_1)+z_3^{\,2}(z_1-z_2)=0$.

Şerban Olteanu , Giurgiu

4.Fie ABCD un patrulater convex şi paralelogramele ACPD şi ABDQ.

Să se arate că:

$$\cos\angle\left(\vec{AC},\vec{BD}\right)=\frac{BP^2-CQ^2}{4\,AC\cdot BD}.$$

Ion Safta , Gazeta Matematică,3/2012-p.26581

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ-Etapa locală

GIURGIU-15.02.2015

CLASA a XI-a

1.Fie şirul cu termenul general $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{9n^4+k}}, n\in N^*$ şi matricea

$A\in \mathrm{M}_2(R), A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{s_n} \\ \frac{1}{s_n} & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$, să se arate că

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2015}{a_n+b_n}=0$.

Stelian Piscan , Giurgiu

2.Să se afle $m\in R$, ştiind că:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{(m-3)^4x^4+3x^2+1}}{2x+5}=3.$$

***

3.Fie $p\in N, p\geq 2$ *şi* $A\in \mathrm{M}_p(C)$ astfel încât $A^2-3A+2I_p=O_p$.

a)Să se arate că matricea $B_n=(A-I_p)^n$ este independentă de $n\in N^*$

b) Demonstraţi că există şirurile de numere întregi $(x_n)_{n\geq 1},(y_n)_{n\geq 1}$ pentru care :

$A^n=x_nA+y_nI_p$, $\forall n\in N^*$

c) Arătaţi că:

$(3A-2I_p)^n=\left[(2^n-1)A+(2-2^n)I_p\right]^2$, $\forall n\in N^*$.

Şerban Olteanu, Giurgiu

4.Fie A şi B matrici pătrate de ordinul doi cu coeficienţi reali care verifică condiţiile:

rangA=1, $\det(B+A^*)=\det(B-A^*)=2$, A^* fiind matricea adjunctă a matricei A.

Calculaţi detB.

Florin Dincă , Gazeta Matematică 3/2012-prelucrare p.26587

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ -Etapa locală

GIURGIU-15.02.2015

CLASA a XII-a

1. Să se arate că:

$\frac{e-1}{4e^2} \le \int_1^{\sqrt{2}} e^{-x^2} dx \le \frac{e+1}{4e^2}$, e fiind numărul lui Euler.

Petronela Toma, Ion Staicu , Giurgiu

2. Fie I un interval deschis de numere reale, $a \in I$, funcţiile $f, g : I \to R$, de două ori derivabile şi cu derivatele de ordinul doi continue , care verifică egalitatea:

$f''(x)g(x) + f(x)g''(x) = 2f'(x)g'(x), \forall x \in I$.

Ştiind că a este punct de extrem local pentru fg, iar F este o primitivă a funcţiei $f'g'$ cu proprietatea că F(a)=2015 să se calculeze integrala nedefinită a funcţiei $F : I \to R$.

Tănţica Dorela Frâncu , Giurgiu

3. Se consideră mulţimea $G = (5, \infty)$ şi legea de compoziţie

$x \circ y = 5 + (x-5)^{\lg(y-5)}$.

a) Să se arate că legea este asociativă, comutativă şi cu element neutru.
b) Aflaţi simetricul elementului $t = 5 + 10^{2015}$ în raport cu legea dată.
c) Rezolvaţi în G ecuaţia:

$\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2015\ ori} = x$

Monica Coadă , Giurgiu

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că $x^3 = x$, $\forall x \in G$.
Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

***